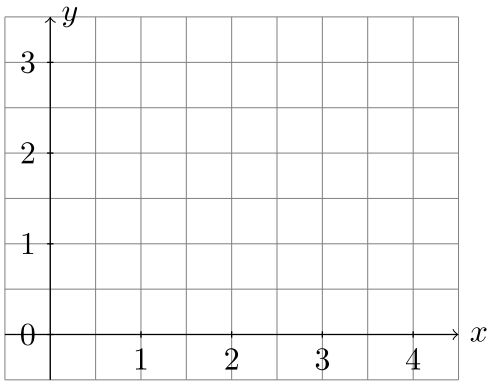
Differentialrechnung

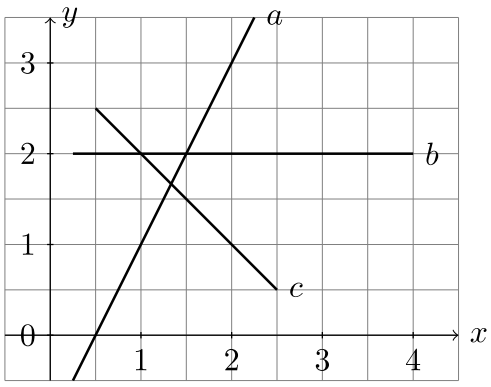
1. Einführung

Mit Hilfe der Differentialrechnung können Veränderungen von Funktionen berechnet werden. Veränderungen von Funktionen sind durch die Steigung der Funktionsgraphen gegeben. Je steiler der Graph umso grösser ist die Änderung. Ist der Graph horizontal, ändert sich nichts. Es geht also im Wesentlichen darum, Steigungen von Funktionsgraphen zu berechnen.

Aufgabe Berechne die Steigung einer Geraden durch die Punkte $(0{,}1)$ und $(4{,}3)$. Zeichne die Punkte und die Gerade zuerst ins Koordinatensystem.



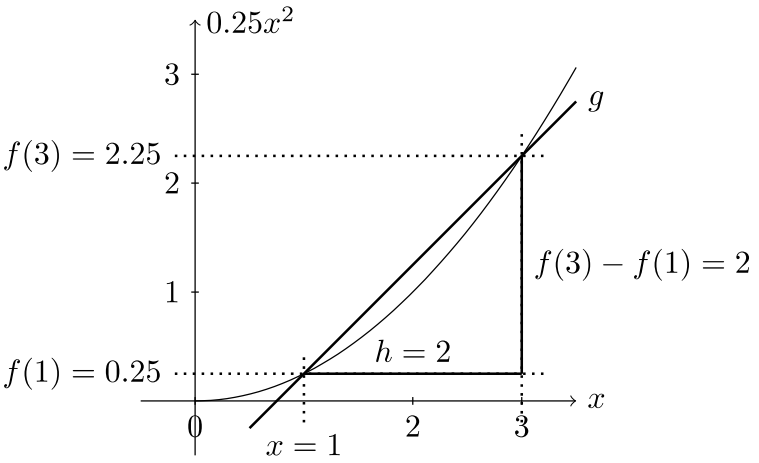
Aufgabe Berechne die Steigung der Geraden (a) - (c)



Eine Steigung ist gegeben durch den Quotienten $\frac{Höhendifferenz}{Längsdifferenz}$

2. Differenzen- und Differentialquotient

Beispiel Wir betrachten die Funktion $f(x)=0.25x^2$



Die Gerade g, auch als **Sekante** bezeichnet, hat die Steigung

$$m=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(3)-f(1)}{2}=\frac{2.25-0.25}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Definition Der **Differenzenquotient** $m=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ einer Funktion $f(x)$ ist die Steigung der Sekante des Graphen von $f(x)$ durch die Punkte mit Koordinaten $(x,f(x))$ und $(x+h,f(x+h))$.

Beispiel Der Differenzenquotient von $f(x)=0.25x^2$ für $x=1$ ist

$$m=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0.25(1+h)^2-0.25\cdot 1^2}{h}=\frac{0.25(1+2h+h^2)-0.25}{h}=\frac{0.25+0.5h+0.25h^2-0.25}{h}$$

$$m=\frac{0.5h+0.25h^2}{h}=0.5+0.25h$$

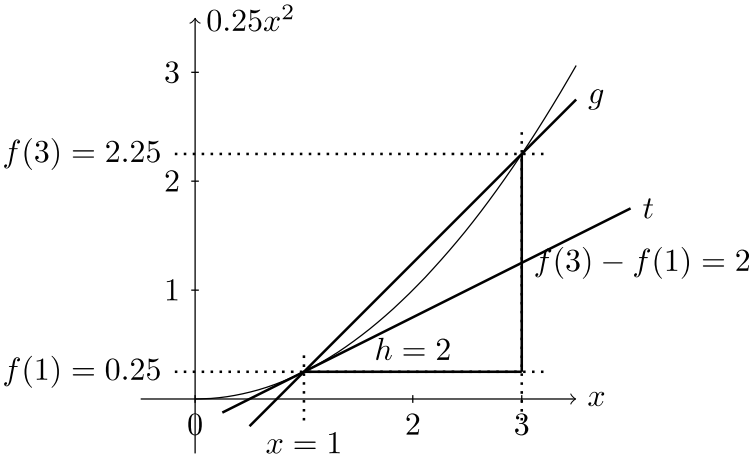
Für $h=2$ ist das gerade die Steigung $m=1$ von oben.

Aufgabe Berechne den Differenzenquotienten der Funktion $f(x)=y$ für $x=a$.

(a) $y=2x-5$ (b) $y=x^2$ (c) $y=x^3$ (d) $y=3x^2+1$

(e) $y=x^{-1}$ (f) $y=(2x+1)^2$ (g) $y=x^{-2}$ (h) $y=2\sqrt{x}$

Beispiel Wir betrachten wieder die Funktion $f(x)=0.25x^2$ und bestimmen nun die Steigung der Tangente t im Punkt $x=1$. Für immer kleinere h berechnen wir den Differenzenquotient $m=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.5+0.25h$.



h	2	1	0.4	0.1	0.04	0.01
m						

Die Resultate für die Steigung m kann als eine Zahlenfolge betrachtet werden. Zahlenfolgen können einen Grenzwert haben, der mit dem Limes berechnet wird.

$$m=\lim_{h\to 0} 0.5+0.25h=\lim_{h\to 0} 0.5+\lim_{h\to 0} 0.25h=0.5+0=0.5$$

Die Tangente t im Punkt $x=1$ von $f(x)=0.25x^2$ ist demnach $m=0.5$.

Definition $f(x)$ heisst im Punkt x **<u>differenzierbar</u>**, falls der Grenzwert $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existiert.

Der Grenzwert wird **<u>Differentialquotient</u>** oder **<u>Ableitung</u>** genannt und wird mit $f'(x)$ oder y' bezeichnet.

$$f'(x)=y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Aufgabe Ermittle den Differentialquotienten der Funktionen der letzten Aufgabe im Punkt $x=a$.

3. Ableitung der Potenzfunktion und einfache Ableitungsregeln

Die Ableitung einer Funktion ist eine wichtige Funktion und wird häufig gebraucht. Um nun nicht immer den Differenzenquotienten und daraus die Ableitung berechnen zu müssen, gibt es Ableitungsregeln, was die Sache vereinfacht. Wir schauen uns die Ableitung von Potenzfunktionen an. Summen von zwei Funktionen und die Multiplikation mit einem Faktor werden auch betrachtet.

Beispiel Wir betrachten die Ableitungen folgender Funktionen

(1) $f_1(x)=x$

(2) $f_2(x)=x^2$

(3) $f_3(x)=x^3$

(4) $f_{-1}(x)=x^{-1}$

(5) $f_{-2}(x)=x^{-2}$

(6) Vermutung für eine Regel

Satz Die Ableitung der Potenzfunktion $f(x)=x^k; k\in\mathbb{Z}$ ist $f'(x)=k\,x^{k-1}$

Beweis Für $f(x)=x^n; n\in\mathbb{N}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

Binomischer Lehrsatz: $(x+h)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n-2}x^2h^{n-2}+\binom{n}{n-1}x\,h^{n-1}+h^n$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+n\cdot x^{n-1}\cdot h+\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot h^2+\ldots+h^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0} n\cdot x^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot h+\ldots+h^{n-1}=n\cdot x^{n-1}$$

■

Beispiel $f(x)=7x^2$ Die Ableitung ist: $f'(x)=7\cdot(x^2)'=7\cdot 2x=14x$

Satz $(c\cdot g(x))'=c\cdot g'(x);\ c\in\mathbb{R}$

Beweis $(c\cdot g(x))'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c\cdot g(x+h)-c\cdot g(x)}{h}=c\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=c\cdot g'(x)$

■

Beispiel $f(x)=x^7+x^3$ Die Ableitung ist: $f'(x)=7\cdot x^6+3\cdot x^2$

Satz $(g_1(x)+g_2(x))'=g_1'(x)+g_2'(x)$

Beweis $(g_1(x)+g_2(x))'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g_1(x+h)+g_2(x+h)-(g_1(x)+g_2(x))}{h}$

$(g_1(x)+g_2(x))'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g_1(x+h)-g_1(x)+g_2(x+h)-g_2(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g_1(x+h)-g_1(x)}{h}+\dfrac{g_2(x+h)-g_2(x)}{h}$

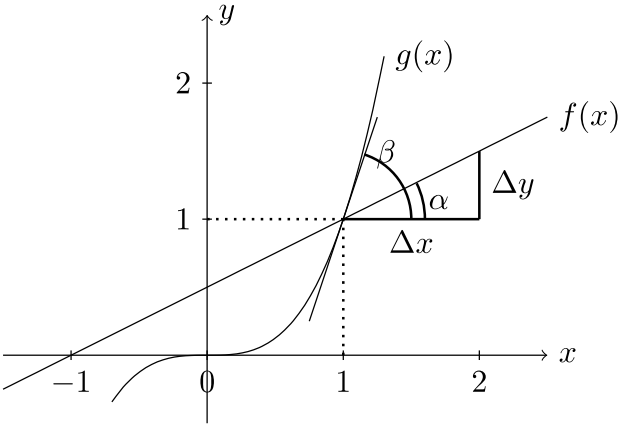
$(g_1(x)+g_2(x))'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g_1(x+h)-g_1(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g_2(x+h)-g_2(x)}{h}=g_1'(x)+g_2'(x)$

■

Aufgaben Aufgaben 1 - 8 Seite 18 im Aufgabenbuch *Analysis* von *Erhard Rhyn*

4. Steigungswinkel, Normale berechnen

Beispiel Unter welchem Winkel schneiden sich die Funktionen $f(x)=0.5x+0.5$ und $g(x)=x^3$



Schnittort berechnen:

Winkel zur Horizontalen berechnen:

(1) $f(x)$: $\tan(\alpha)$ = ?

(2) $g(x)$: $\tan(\beta)$ = ?

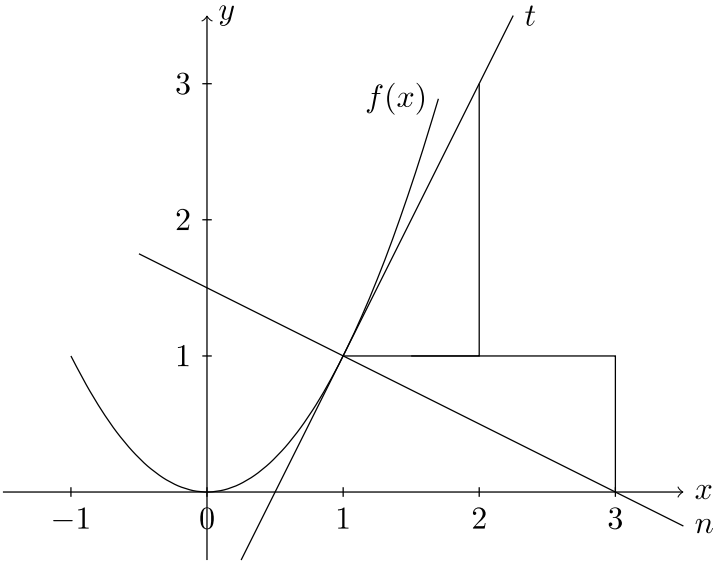
Schnittwinkel = $\beta-\alpha$ =

Bemerkung Anstelle von h wird häufig Δx genommen, weil $\Delta x=x_2-x_1$. Analog ist $\Delta y=y_2-y_1$.

Für die Ableitung wird auch $\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ geschrieben. dx ist Δx für unendlich kleines Δx.

$\frac{dy}{dx}$ ist der Differentialquotient, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist der Differenzenquotient.

Beispiel Berechne die Gleichung der Normalen zum Graph von $f(x)=x^2$ im Punkt $(1,1)$



(1) Steigung m_t der Tangenten t:

(2) Steigung m_n der Normalen n:

(3) Funktionsgleichung der Normalen:

Aufgaben Aufgaben 9 - 13 Seite 18, 19 im Aufgabenbuch *Analysis* von *Erhard Rhyn*

5. Höhere Ableitungen

Beispiel Leite $f(x)=-\frac{1}{8}(x-3)^4+(x-3)^2+2=-\frac{1}{8}(x^4-12x^3+46x^2-60x-7)$ fünf Mal ab.

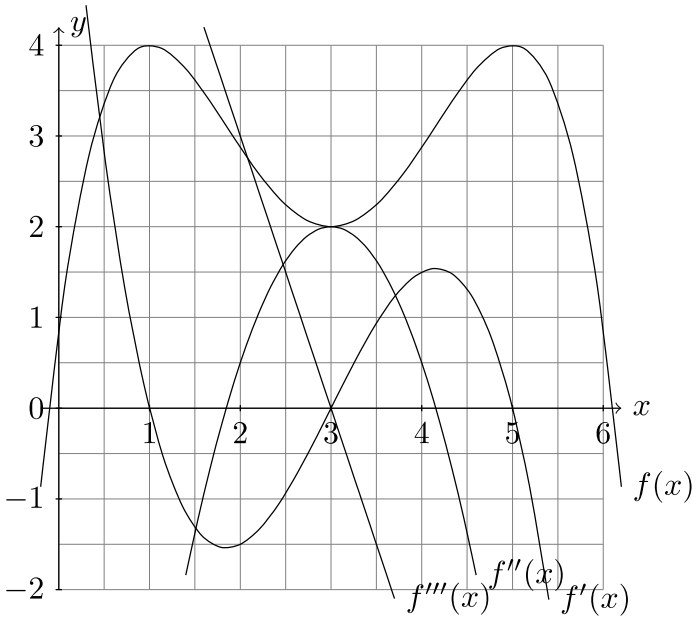
1. Ableitung: $f'(x)$ =

2. Ableitung: $f''(x)$ =

3. Ableitung: $f'''(x)$ =

4. Ableitung: $f^{(4)}(x)$ =

5. Ableitung: $f^{(5)}(x)$ =



Mit Hilfe der Abbildung kann folgendes gesagt werden

(1) $f(x)$ hat ein Maximum oder Minimum wenn

(2) $f(x)$ fällt dort wo

(3) $f(x)$ steigt dort wo

(4) Wo $f''(x)>0$ ist $f'(x)$ und $f(x)$

(5) Wo $f''(x)<0$ ist $f'(x)$ und $f(x)$

(6) In einem Wendepunkt ist

Definition In einem **<u>Wendepunkt</u>** wechselt der Graph von einer Rechtskurve in eine Linkskurve oder umgekehrt. Es wird auch von einem Bogenwechsel gesprochen.

Definition Ein **Terrassen- oder Sattelpunkt** ist ein Punkt in dem der Graph horizontal verläuft, aber weder ein Maximum noch ein Minimum ist.

Beispiel $f(x)=(x-3)^3+1$ hat einen Terrassen- oder Sattelpunkt bei $x=3$.

Bemerkungen

(a) Falls $f'(x)=0$ verläuft der Graph von $f(x)$ bei x horizontal. Es gibt drei Möglichkeiten für $f(x)$:

(1) $f(x)$ hat bei x ein Maximum.

(2) $f(x)$ hat bei x ein Minimum.

(3) $f(x)$ hat bei x einen Terrassenpunkt.

(b) Aus $f''(x)$ lassen sich zwei Dinge für $f(x)$ schliessen:

(1) Falls $f''(x)>0$ ist der Graph von $f'(x)$ bei x zunehmend und der Graph von $f(x)$ macht eine Linkskurve, weil deren Steigung $f'(x)$ zunehmend ist.

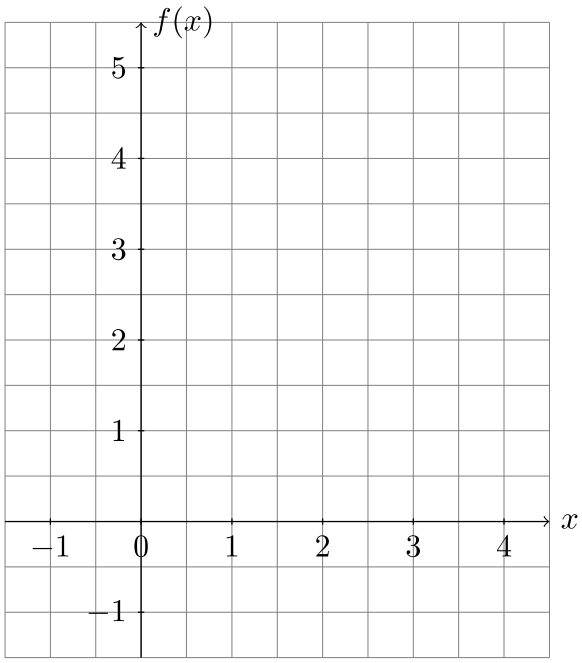
(2) Falls $f''(x)<0$ ist der Graph von $f'(x)$ bei x abnehmend und der Graph von $f(x)$ macht eine Rechtskurve, weil deren Steigung $f'(x)$ abnehmend ist.

(c) Aus (a) und (b) schliessen wir, dass in einem Maximum von $f(x)$ zwei Bedingungen gelten müssen: (1) $f'(x)=0$ und (2) $f''(x)<0$. In einem Minimum von $f(x)$ gelten: (1) $f'(x)=0$ und (2) $f''(x)>0$. Diese beiden Bedingungen sind hinreichend um ein Maximum oder Minimum zu identifizieren.

(d) Falls $f''(x)=0$ heisst das noch nicht, dass $f(x)$ bei x ein Wendepunkt hat. Eine weitere Bedingung ist, dass $f(x)$ bei x ein Bogenwechsel macht. Es muss demnach auch gelten dass $f'''(x)\neq 0$. Die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt ist also: (1) $f''(x)=0$, (2) $f'''(x)\neq 0$

Die **<u>Kurvendiskussion</u>** dient dazu eine unbekannte Funktion zu analysieren (z.B. Nullstellen, Extrema, Wendepunkte). Sie hilft auch beim Skizzieren einer Funktion.

Beispiel Bestimme die Nullstellen, Extrema, Wendepunkte von $f(x)=-x^3+3x^2$ und skizziere $f(x)$.

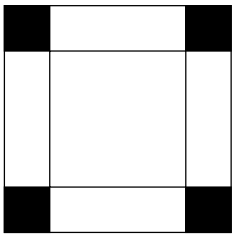


Aufgaben Aufgaben 22 - 27 Seite 20 im Aufgabenbuch *Analysis* von *Erhard Rhyn*

6. Extremalaufgaben

Beispiel Schachtelproblem

Aus einem quadratischen Karton (Seite 30 cm) soll durch Ausstanzen der dunklen Quadrate und Zusammenfalten eine Schachtel ohne Deckel mit maximalem Volumen entstehen. Wie hoch ist die Schachtel?



Aufgaben Aufgaben 57, 59, 62, 63, 65 Seite 21, 22 im Aufgabenbuch *Analysis* von *Erhard Rhyn*