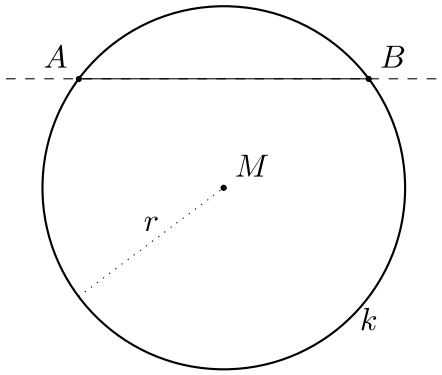
Der Kreis

Aufgaben (Buch: *Geometrie 1, Deutschschweizer Mathematikkommission)* Seite 89 - 106

1. Sehnen, Sekanten und Tangenten

Definition



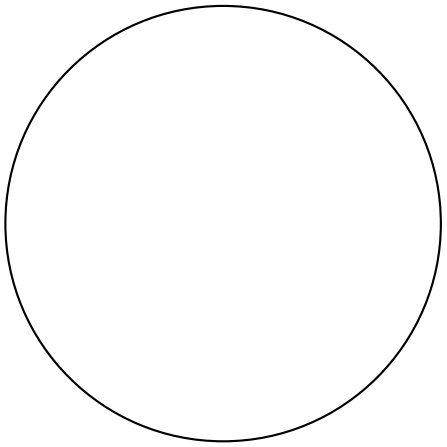
Ein **Kreis** k ist die Menge aller Punkte, die einen konstanten Abstand (**Radius** r) zu einem vorgegebenen Punkt M (**Mittelpunkt** oder **Zentrum**) haben.

Zwei Punkte A und B auf einem Kreis teilen diesen in zwei **Kreisbögen**. Die Strecke $\overline{AB}$ zwischen den Punkten nennt man **Sehne**. Die Gerade (AB) durch A und B nennt man **Sekante**.

Bemerkung

Dreieck BAM ist gleichschenklig. Also liegt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$. Diese Tatsache kann verwendet werden, um das Kreiszentrum zu konstruieren.

Beispiel Konstruiere das Kreiszentrum.



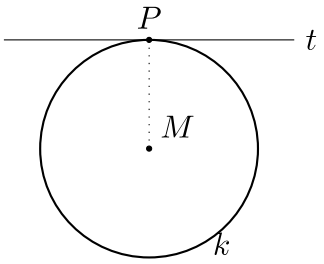
Konstruktionsbeschrieb

(1) Zeichne zwei Sehnen.

(2) Konstruiere die Mittelsenkrechten, so dass sie sich schneiden. Schnittpunkt ist Zentrum des Kreises.

Definition

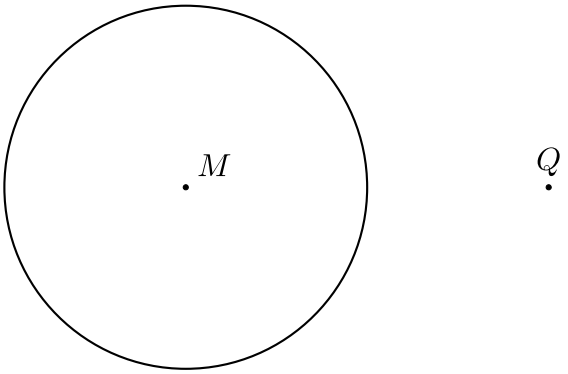
Eine Gerade die einen Kreis k in einem Punkt P berührt, nennt man **Tangente** t.



Bemerkung

Strecke $\overline{PM}$ ist senkrecht zur Tangente t. Das kann benutzt werden um eine Tangente zu konstruieren (Thaleskreis).

Beispiel Konstruiere die Tangenten zum Kreis durch den Punkt Q.



Konstruktionsbeschrieb

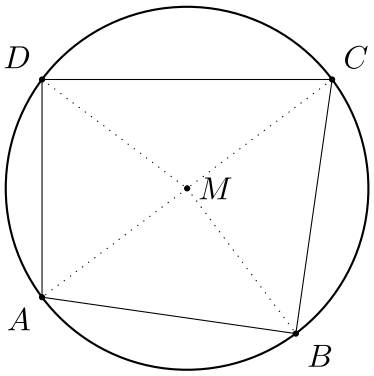
(1) Zeichne Thaleskreis über $\overline{QM}$. Schnittpunkte P_1 und P_2 entstehen.

(2) Tangenten (P_1Q) und (P_2Q) zeichnen.

Was kann über die Strecken $\overline{P_1Q}$ und $\overline{P_2Q}$ gesagt werden? Begründe.

Definition

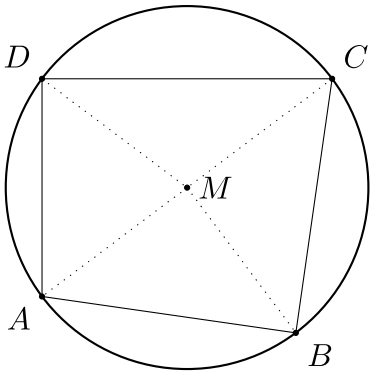
Vierecke in einem Umkreis heissen **Sehnenvierecke**.



Satz In einem Sehnenviereck messen gegenüberliegende Winkel zusammen 180^o. Es gilt:

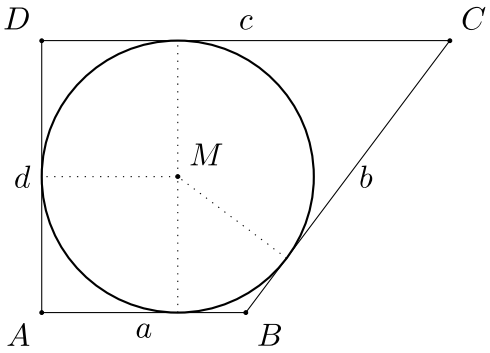
$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^o$$

Beweis



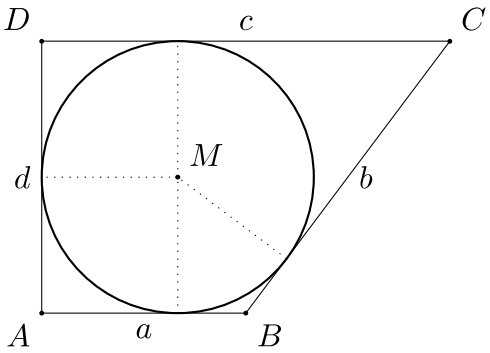
Definition

Vierecke mit einem Inkreis heissen **<u>Tangentenvierecke</u>**.



Satz In einem Tangentenviereck gilt: $a + c = b + d$

Beweis



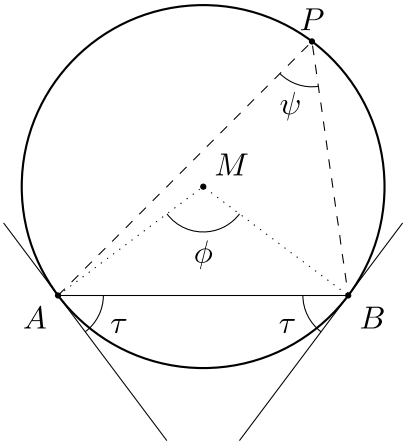
2. Strecken und Winkel im Kreis

Definition

Verbindet man die Sehnenendpunkte A und B mit dem Zentrum des Kreises, erhält man den sogenannten **Zentriwinkel** ϕ.

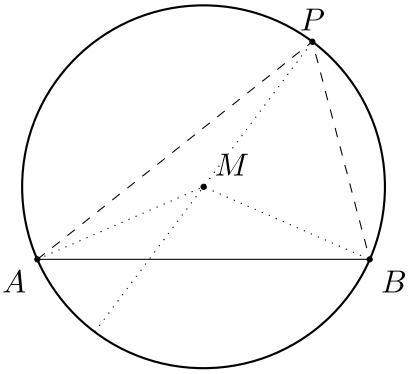
Verbindet man A und B mit einem beliebigen Punkt P auf dem Kreisbogen, erhält man den sogenannten **Peripheriewinkel** ψ.

Der dritte Winkel ist der Winkel zwischen der Sehne und der Tangente, der sogenannte **Sehnentangentenwinkel** τ. Es gibt zwei solche Winkel, in den Punkten A und B, die gleich gross sind.



Zentriwinkelsatz Der Zentriwinkel ist immer das Doppelte des Peripheriewinkels: $\phi = 2\,\psi$

Beweis Zentriwinkelsatz



Peripheriewinkelsatz Der Peripheriewinkel ist immer gleich, unabhängig wo Punkt P auf dem Kreisbogen liegt.

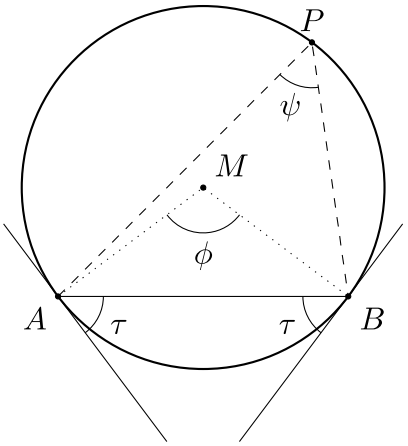
Beweis Peripheriewinkelsatz Folgt direkt aus dem Zentriwinkelsatz.

Bemerkungen

- Der Satz von Thales ist nichts anderes als der Zentriwinkelsatz für $\phi = 180^o$. Die Sehne geht dann durch das Zentrum des Kreises und der Peripheriewinkel ist $\psi = 90^o$.
- Falls die Sehne $\overline{AB}$ in der Figur oben oberhalb des Kreiszentrums liegt, wird der Zentriwinkel grösser als der gestreckte Winkel ($\phi > 180^o$) und der Peripheriewinkel wird grösser als der rechte Winkel ($\psi > 90^o$).

Sehnentangentenwinkelsatz Die beiden Sehnentangentenwinkel sind immer gleich gross wie der Peripheriewinkel: $\tau = \psi$

Beweis Sehnentangentenwinkelsatz



Bemerkung Mit Hilfe des Sehnentangentensatzes kann über einer Strecke $\overline{AB}$ ein Kreisbogen gezeichnet werden, auf dem dann alle Punkte P den gleichen Peripheriewinkel ($\sphericalangle APB$) haben. Dieser Kreis wir auch als Ortsbogen bezeichnet. Der Thaleskreis ist der Spezialfall für $\tau = \psi = 90^o$.

Beispiel Zeichne den Ortsbogen über der Strecke für $\overline{AB}$ für den Winkel $\psi = 60^o$.



Konstruktionsbeschrieb

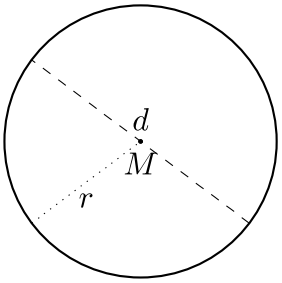
(1) Zeichne Sehnentangentenwinkel $\tau = \psi$ in den beiden Punkten A und B ein. Tangenten t_1, t_2 entstehen.

(2) Zeichne Senkrechte auf t_1, t_2 in den Punkten A und B ein. Schnittpunkte der beiden Senkrechten ist Zentrum des Ortskreises. Ortskreis zeichnen.

3. Umfang und Flächeninhalt

Definition

Der **<u>Durchmesser</u>** d eines Kreises ist das doppelte des Radius r:



$$d = 2r$$

Definition

Die **<u>Kreiszahl</u>** π ist eine irrationale Konstante und ist auf den meisten Taschenrechnern zu finden.

$$\pi \approx 3.141592654$$

Satz Für den Umfang u eines Kreises mit Durchmesser d gilt:

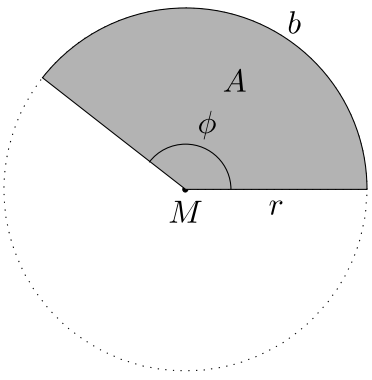
$$u = d \cdot \pi$$

Satz Für die Fläche A eines Kreises mit Radius r gilt:

$$A = r^2 \cdot \pi$$

Bemerkung

In einem Kreissektor mit Radius r, Zentriwinkel ϕ, Bogenlänge b und Sektorfläche A gilt:



$$b = 2r\,\pi \cdot \frac{\phi}{360^o}$$

$$A = r^2\,\pi \cdot \frac{\phi}{360^o} = \frac{1}{2} b \cdot r$$