Potenzfunktionen

Verwendetes Aufgabenbuch: *Deller/Gebauer/Zinn, Algebra 2*

1. Einführung

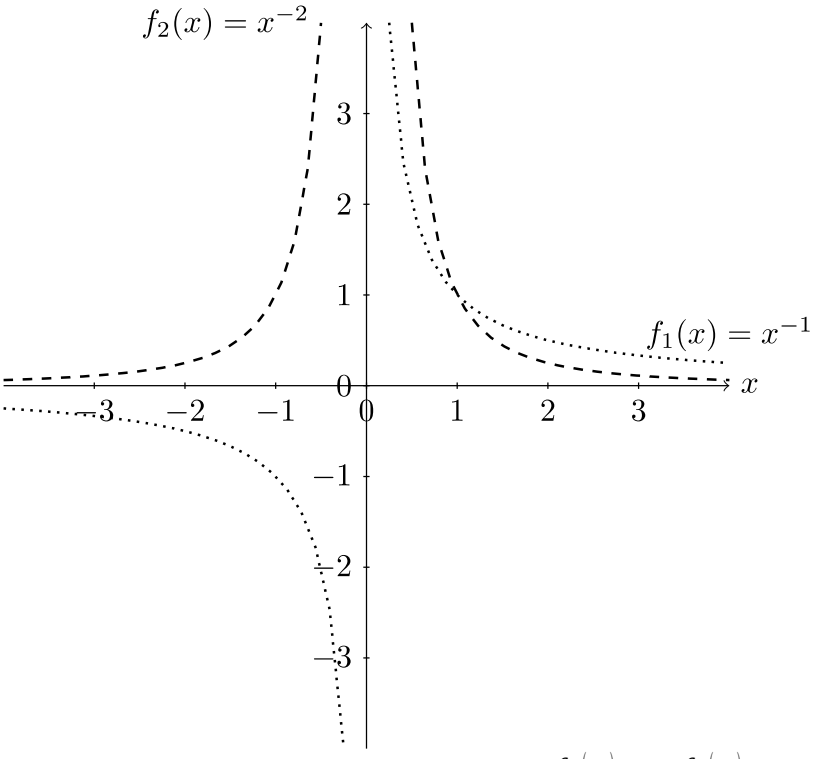
Definition Funktionen von der Form $f(x)=x^a, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ heissen **Potenzfunktionen**.

Bemerkung Im Moment beschränken wir uns auf $f(x)=x^k, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Aufgaben 103, 104, 105, S.36

Definition Geraden, welcher sich der Graph immer mehr annähert, je weiter man vom Ursprung entfernt ist, nennt man Asymptoten.

Beispiel $f(x)=x^{-n}, n \in \mathbb{N}$, x- und y-Achsen sind Asymptoten.



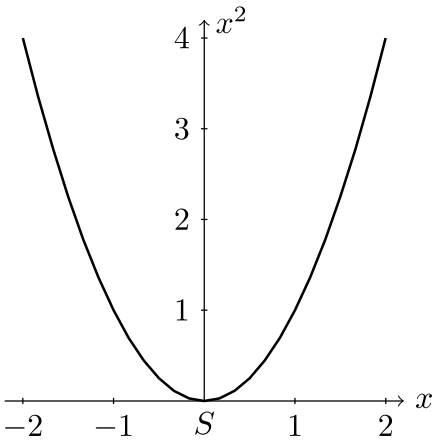
Die x- und y-Achsen sind Asymptoten von $f_1(x)$ und $f_2(x)$, der Ursprung ist der Asymptotenschnittpunkt A.

Aufgaben 106, S 36

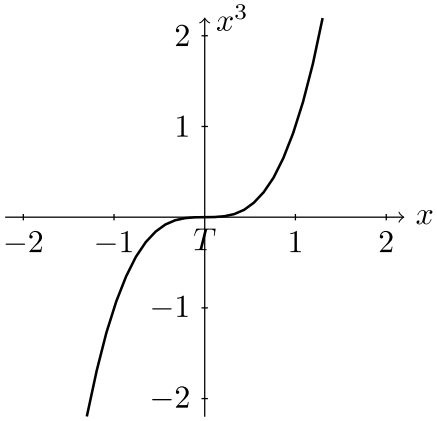
2. Änderungen von Funktionsgleichungen

Definition Als **Scheitelpunkt** S wird der Schnittpunkt des Graphen mit der Symmetrieachse bezeichnet. Als Terrassenpunkt bezeichnet man einen Punkt eines Graphen bei dem der Graph horizontal verläuft und die Krümmung des Graphen wechselt.

Beispiel



S – Scheitelpunkt



T – Terrassenpunkt

(a) Multiplikation mit einem Faktor

Aufgaben 107, 108 S. 36

$g(x)=a\,x^k, a\in\mathbb{R}$ hat dieselbe Form wie $f(x)=x^k$, einfach um a gestreckt falls $a>0$. Falls $a=0$ wird $g(x)=0$. Falls $a<0$ wird gestreckt und an der x-Achse gespiegelt.

(b) Addition einer Konstanten

Aufgaben 109 S. 36

$g(x)=x^k+b, b\in\mathbb{R}$ hat den gleichen Graph wie $f(x)=x^k$, einfach um b vertikal verschoben.

$g(x)=(x+c)^k, c\in\mathbb{R}$ hat den gleichen Graph wie $f(x)=x^k$, einfach um c horizontal verschoben.

Aufgaben 110, 111, 112, 113, 114 S. 36

(c) Allgemeine Potenzfunktionen

Die allgemeine Form einer Potenzfunktion ist eine Potenzfunktion von der Form

$f(x)=a(x+c)^k+b\,;a,b,c\in\mathbb{R};k\in\mathbb{Z}$

Bemerkung Falls eine gegebene Funktion in diese Form gebracht werden kann, kann die Lage eines Scheitelpunktes S, eines Terrassenpunktes T oder eines Asymptotenschnittpunktes A direkt abgelesen werden.

$f(x)$ hat einen Scheitelpunkt S (falls k pos. gerade), einen Terrassenounkt T (falls k pos., ungerade) oder einen Symptotenschnittpunkt A (falls k neg.) bei $x=-c$, $y=f(-c)=b$.

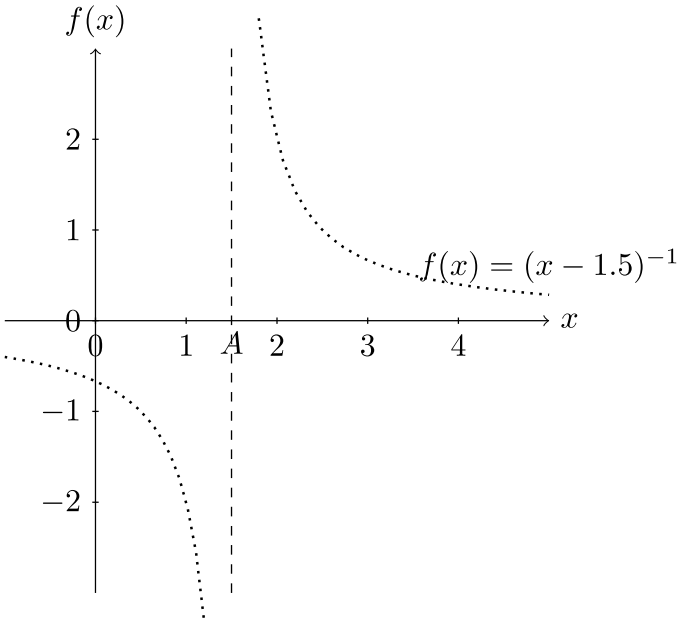
Beispiel (Aufgabe 113(d))

$f(x)=\frac{4}{2x-3}$

Umformen: $f(x)=4(2x-3)^{-1}=8(x-\frac{3}{2})^{-1}$

Also hat die Funktion einen Asymptotenschnittpunkt A bei $(\frac{3}{2},0)$

Überprüfung mit Graph (dargestellt wird $f(x)$ ohne Streckungsfaktor 8, was am Asymptotenschnittpunkt A nichts ändert):



3. Umkehrfunktionen

Beispiel

$f(x)=3x$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=f(x)$	-9	-6	-3	0	3	6	9

$g(x)=x/3$

Wertetabelle:

x	-9	-6	-3	0	3	6	9
$y=g(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Aus den Wertetabellen sieht man, dass wenn ausgehend von einer Zahl x $f(x)$ berechnet wird und von dieser Zahl $g(x)$ berechnet wird, man wieder x erhält. In mathematischer Schreibweise:

$$g(f(x))=g(3x)=\frac{3x}{x}=x$$

Definition $f^{-1}(x)$ ist die **<u>Umkehrfunktion</u>** von $f(x)$, wenn $f^{-1}(f(x))=x$ gilt.

Man findet die Umkehrfunktion indem man $y=f(x)$ nach x auflöst und x, y vertauscht.

Beispiel $y=f(x)=3x$

Auflösen nach x ergibt $x=y/3$

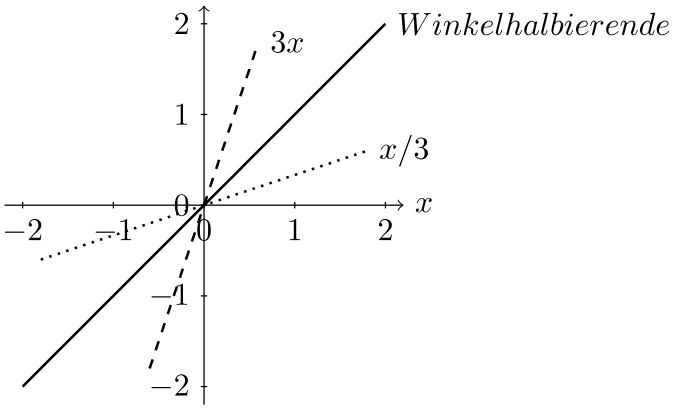
x, y vertauschen ergibt $y=x/3$

Also ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)=x/3$, was $g(x)$ von oben entspricht.

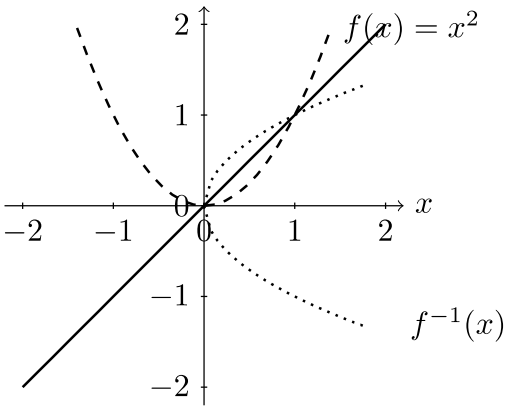
Aufgaben 153, S. 43

Satz Den Graph von $f^{-1}(x)$ erhält man, indem man den Graph von $f(x)$ an der Winkelhalbierenden der x- und y-Achse spiegelt.

Beispiel Umkehrfunktion von $f(x)=3x$



Beispiel Umkehrfunktion von $f(x)=x^2$



Problem: $f^{-1}(x)$ wie es oben gezeichnet ist, ist keine Funktion, weil es keine klare Zuordnung $x \rightarrow f^{-1}(x)$ gibt. Eine Funktion g ordnet jedem x im Definitionsbereich ein eindeutiges $g(x)$ zu. Aber oben werden einem $x>0$ zwei Werte zugeordnet.

Bemerkung Nicht alle Funktionen haben eine eindeutige Umkehrzuordnung und damit eine Umkehrfunktion.

Definition Eine Funktion $f(x)$ ist **eineindeutig** oder **bijektiv**, wenn eine Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ existiert.

Beispiel Die Funktion $f(x)=x^2$ ist nicht eineindeutig.

Aufgaben 149, 150, 157, 158, 159, 160, 161, S. 42 - 44