Symmetrie in der Ebene

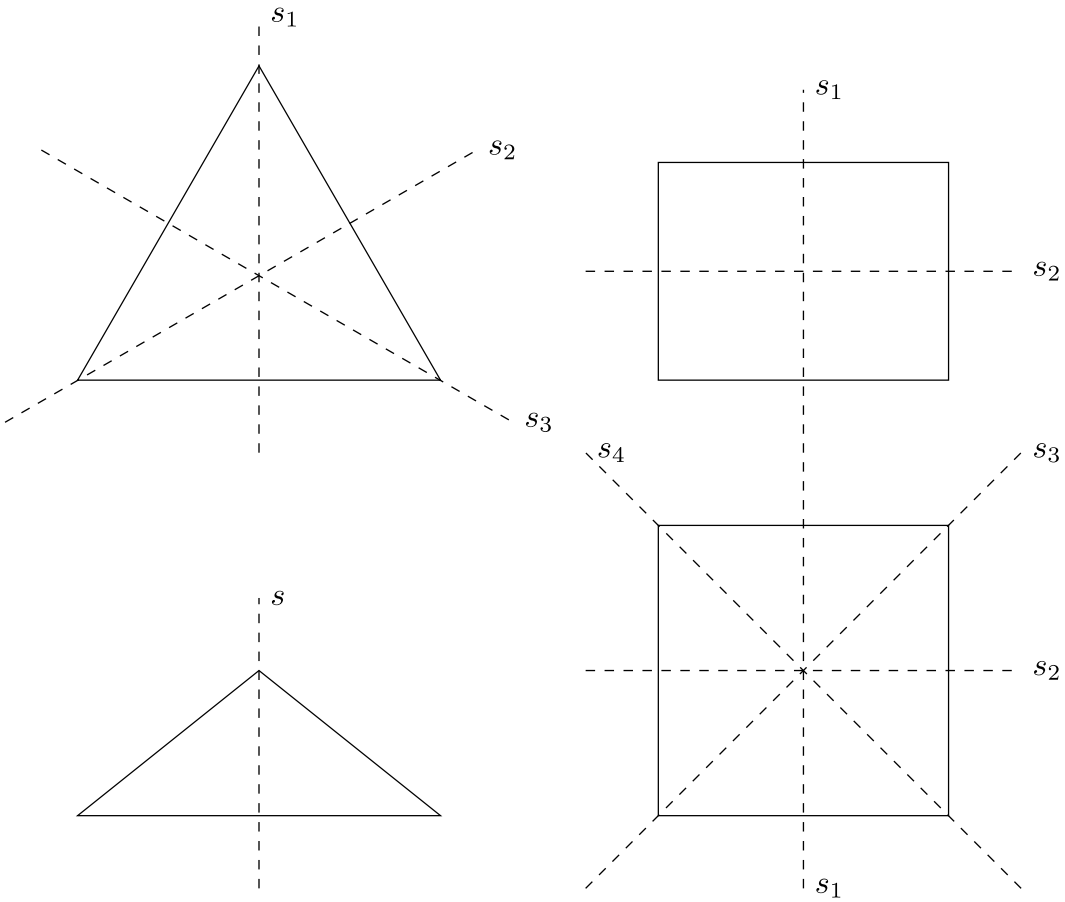
Verwendetes Aufgabenbuch: *Geometrie1, Deutschschweizer Mathematikkommission*

1. Achsensymmetrie und Achsenspiegelung

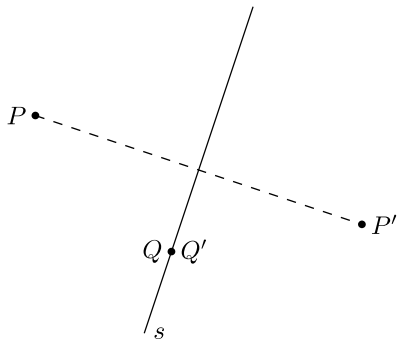
Eine Figur, welche sich längs einer Geraden s so falten lässt, dass die beiden Hälften sich gegenseitig genau decken, heisst **achsensymmetrisch**. Zerschneidet man sie längs dieser Geraden, so zerfällt die Figur in zwei spiegelbildliche (achsensymmetrische) Hälften. Die Gerade s nennt man **Symmetrieachse** oder **Spiegelachse**.

Beispiele

Zeichne die Symmetrieachsen in die folgenden Figuren (gleichseitiges Dreieck, Rechteck, gleichschenkliges Dreieck, Quadrat).



Die **Achsenspiegelung** oder **Geradenspiegelung** ist eine Abbildung. Gegeben sind eine Spiegelgerade s und ein Punkt P. Die Achsenspiegelung ordnet dem Punkt P den Punkt P' zu, so dass die Verbindungsstrecke PP' von der Geraden s rechtwinklig halbiert wird. P ist das sogenannte **Urbild** oder auch **Originalbild**, P' ist das sogenannte **Bild** oder hier auch **Bildpunkt**. Die Punkte P und P' liegen **achsensymmetrisch** bzgl. s.



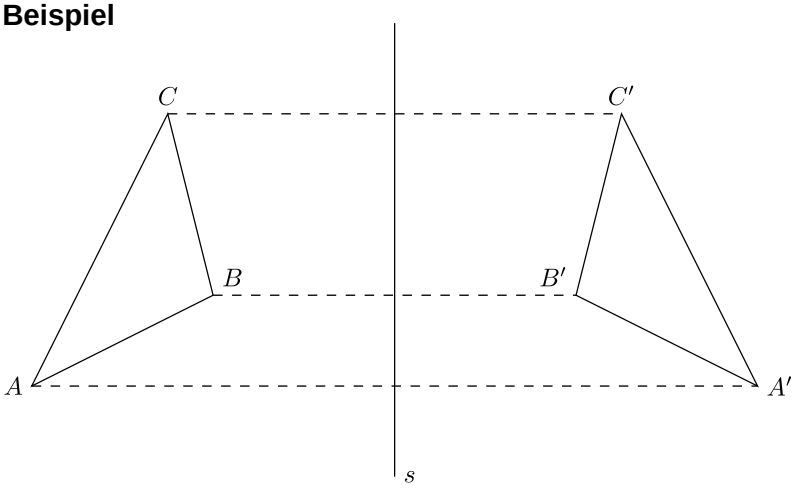
Konstruktionsbeschrieb

(1) Senkrechte zur Spiegelgeraden s durch den zu spiegelnden Punkt P.

(2) Mit Zirkel die Strecke $\overline{Ps}$ nach $\overline{P's}$ abtragen. Punkt P' entsteht.

Wird ein auf der Spiegelachse liegender Punkt Q gespiegelt, ist der Bildpunkt Q' gerade gleich dem Urbild Q. Man nennt Q einen **Fixpunkt**.

Beispiel

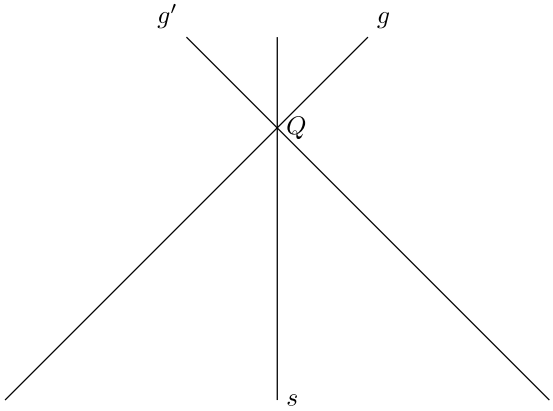


Originalfigur und Bildfigur sind **deckungsgleich** (oder auch **kongruent**), d. h. sie haben die gleiche Grösse und die gleiche Form (winkeltreu und längentreu). Man schreibt:

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ (Dreieck ABC ist kongruent zum Dreieck $A'B'C'$)

Beachte Die Orientierung von Urbild und Bild kehrt um (nicht orientierungstreu).

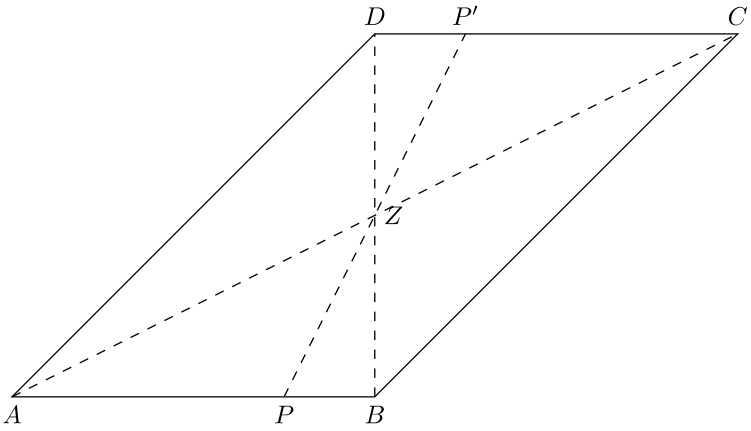
Ist die Originalfigur eine Gerade g, die weder parallel noch senkrecht zur Spiegelachse s liegt, schneidet die Gerade g die Achse s in einem Punkt Q (Fixpunkt) und die Bildfigur ist eine Gerade g', so dass die Achse s die Winkelhalbierende zwischen g und g' ist.



Aufgaben Seite 21 - 24: 1, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 16

2. Punktsymmetrie und Punktspiegelung

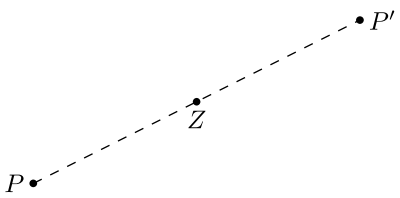
Beispiel Parallelogramm (Viereck bei dem die gegenüberliegenden Seiten parallel sind.)



Ein Parallelogramm ist nicht achsensymmetrisch. Man kann aber beobachten, dass bezüglich dem Zentrum Z immer zwei Punkte des Parallelogramms gleich weit entfernt gegenüber liegen. Beispielsweise liegt Punkt A gegenüber Punkt C gleich weit entfernt. Für alle Punkte P der Figur gibt es einen bzgl. Punkt Z gegenüberliegenden Punkt P', der auch zur Figur gehört.

Figuren, die ein solches Zentrum aufweisen, heissen **punktsymmetrisch**. Der Mittelpunkt heisst **Symmetriezentrum** oder **Spiegelzentrum**.

Die **Punktspiegelung** ist eine Abbildung. Gegeben sind ein Spiegelzentrum Z und ein Punkt P. Die Punktspiegelung ordnet dem Punkt P den Punkt P' zu, so dass die Verbindungsstrecke PP' vom Zentrum Z halbiert wird und Z auf PP' liegt. P ist das sogenannte **Urbild** oder auch **Originalbild**, P' ist das sogenannte **Bild** oder hier auch **Bildpunkt**. Die Punkte P und P' liegen **punktsymmetrisch** bzgl. Z.

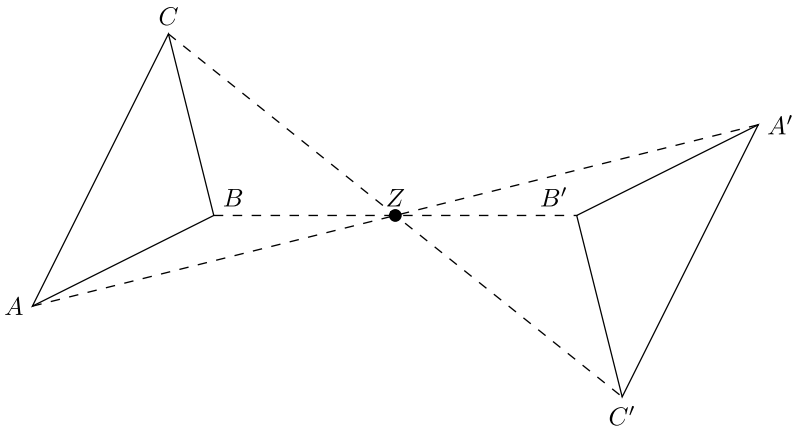


Konstruktionsbeschrieb

(1) Gerade durch Spiegelzentrum Z und durch den zu spiegelnden Punkt P.

(2) Mit Zirkel die Strecke $\overline{PZ}$ nach $\overline{P'Z}$ abtragen. Punkt P' entsteht.

Beispiel



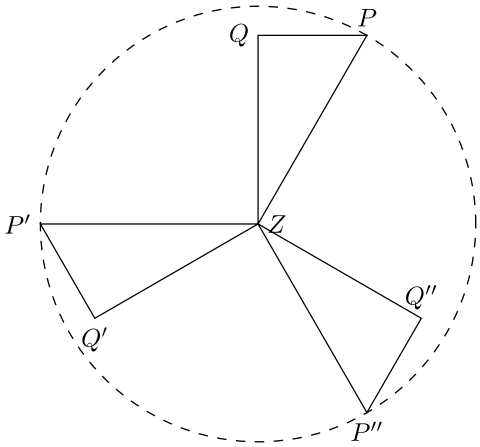
Originalfigur und Bildfigur sind **<u>deckungsgleich</u>** (oder auch **<u>kongruent</u>**), d. h. sie haben die gleiche Grösse und die gleiche Form (winkeltreu und längentreu). Die Orientierung von Figuren bleibt erhalten (orientierungstreu), im Gegensatz zur Achsenspiegelung.

Ist die Originalfigur eine Gerade g, die nicht durch das Spiegelzentrum Z geht, ist die Bildgerade g' parallel zu g. Man kann das in der Figur oben sehen, wenn man beispielsweise die Geraden (AB) und $(A'B')$ betrachtet.

Aufgaben Seite 25 - 28: 19, 21, 22, 24, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 34

3. Drehsymmetrie und Drehungen

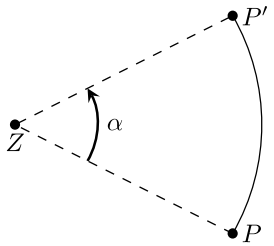
Beispiel (Drei halbe gleichseitige Dreiecke regelmässig im Kreis verteilt)



Die Figur ist weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch. Man kann aber beobachten, dass bezüglich dem Zentrum Z immer drei Punkte der Figur gleich weit entfernt liegen und die Punkte mit dem gleichen Winkel auseinander liegen. Beispielsweise liegen die Punkt P, P', P'' gleich weit vom Zentrum Z entfernt und die Winkel $\sphericalangle PZP', \sphericalangle P'ZP'', \sphericalangle P''ZP$ sind alle gleich 120^o. Für alle Punkte der Figur gibt es einen bzgl. Punkt Z mit 120^o gedrehten Punkt, der auch zur Figur gehört.

Figuren, die ein solches Zentrum aufweisen und durch Drehung auf sich selbst abgebildet werden können, heissen **drehsymmetrisch**. Der Mittelpunkt heisst **Drehzentrum**.

Die **Drehung** ist eine Abbildung. Gegeben sind ein Drehzentrum Z, ein Drehwinkel α und ein Punkt P. Die Drehung ordnet dem Punkt P den Punkt P' zu, so dass $\overline{PZ} = \overline{P'Z}$ und der Winkel $\sphericalangle PZP' = \alpha$. P ist das sogenannte **Urbild** oder auch **Originalbild**, P' ist das sogenannte **Bild** oder hier auch **Bildpunkt**. Die Punkte P und P' liegen **drehsymmetrisch** bzgl. Z.



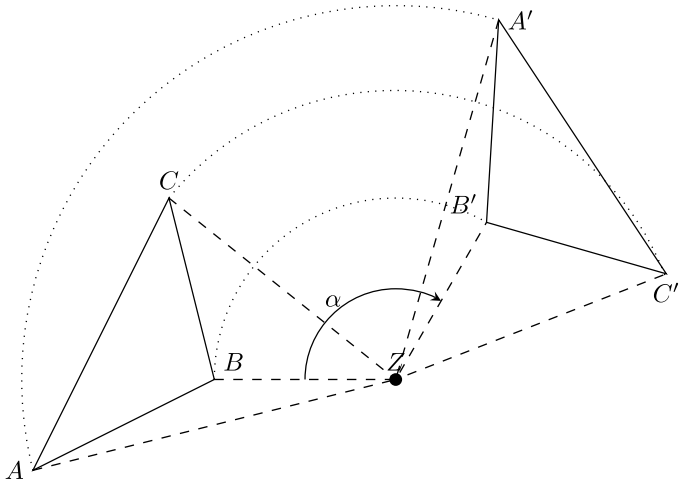
Konstruktionsbeschrieb

(1) Gerade durch das Spiegelzentrum Z und den zu spiegelnden Punkt P.

(2) Winkel α abtragen. Im Gegenuhrzeigersinn ist der Winkel positiv, sonst ist er negativ.

(3) Kreis mit Zentrum Z und Radius $\overline{PZ}$ so dass Schnittpunkt P' entsteht.

Beispiel Drehwinkel $\alpha = -120^o$



Originalfigur und Bildfigur sind **deckungsgleich** (oder auch **kongruent**), d. h. sie haben die gleiche Grösse und die gleiche Form (winkeltreu und längentreu). Die Orientierung von Figuren bleibt erhalten (orientierungstreu).

Eine Drehung mit $\alpha = 180^o$ entspricht einer Punktspiegelung. Jede punktsymmetrische Figur ist auch drehsymmetrisch, aber nicht umgekehrt.

Eine Drehung mit beispielsweise $\alpha = -120^o$, wie oben im Beispiel, ist gleich wie eine Drehung mit $\alpha = 240^o$. Man kann noch weiter gehen und sagen, dass es auch gleich ist wie eine Drehung um $\alpha = 600^o$, usw. Man kann also zum Drehwinkel das Mehrfache von 360^o addieren oder subtrahieren und erhält immer die gleiche Drehung.

Aufgaben Seite 29 - 32: 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 54, 55