Trigonometrie I

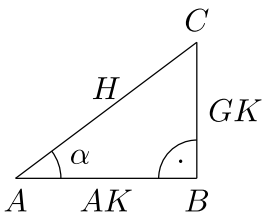
1. Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck

Bezeichnungen In einem rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man die beiden kurzen Seiten mit **Katheten** und die lange Seite mit **Hypotenuse**.

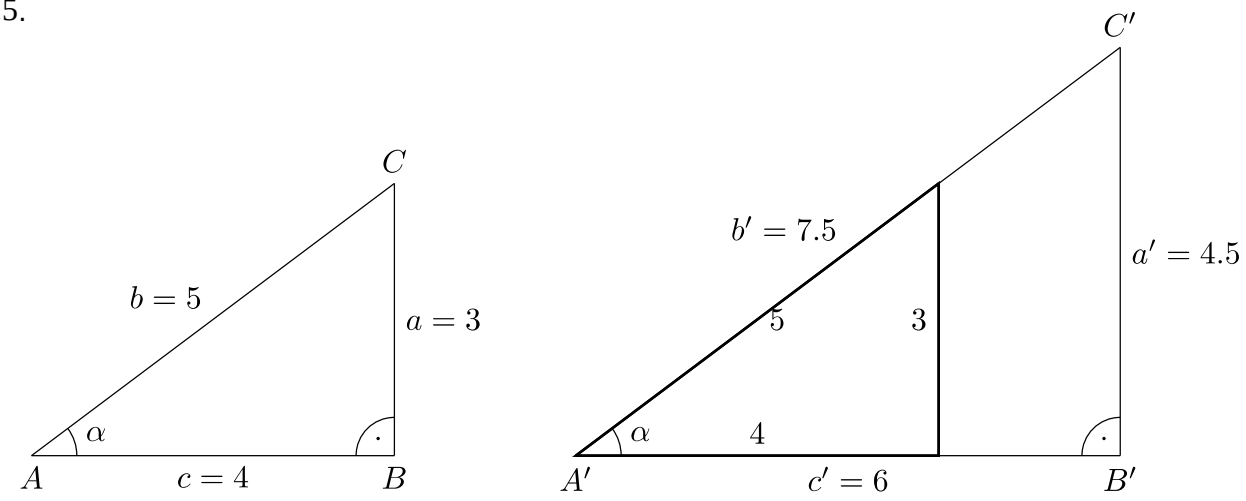
H ist **Hypotenuse**

GK ist bezüglich Winkel α **Gegenkathete**

AK ist bezüglich Winkel α **Ankathete**



Beispiel Gegeben zwei ähnliche, rechtwinklige Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit Streckfaktor $k=1.5$.



Ähnlichkeit heisst: $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$

Umformen: $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$, $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$, d.h. Seitenverhältnisse $\frac{GK}{H}$, $\frac{AK}{H}$ und $\frac{GK}{AK}$ sind gleich.

Satz (1) Haben zwei rechtwinklige Dreiecke den gleichen spitzen Winkel α, so sind sie ähnlich (Ähnlichkeitssatz ww) und haben die gleichen Seitenverhältnisse $\frac{GK}{H}$, $\frac{AK}{H}$ und $\frac{GK}{AK}$.

(2) Zu jedem Seitenverhältnis $\frac{GK}{H}$, $\frac{AK}{H}$ oder $\frac{GK}{AK}$ in einem rechtwinkligen Dreieck gehört eindeutig ein spitzer Winkel α.

Definition Folgende **<u>Winkelfunktionen</u>** bilden die Seitenverhältnisse auf den spitzen Winkel α im rechtwinkligen Dreieck ab.

$\sin(\alpha)=\frac{GK}{H}$ **<u>Sinus</u>**

$\cos(\alpha)=\frac{AK}{H}$ **<u>Kosinus</u>**

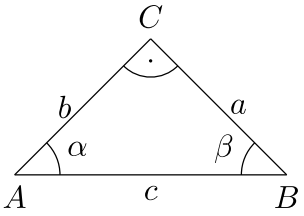
$\tan(\alpha)=\frac{GK}{AK}$ **<u>Tangens</u>**

Bemerkung Im Dreieck mit Seiten a,b,c sieht das dann wie folgt aus.

$\sin(\alpha)=\frac{a}{c}$

$\cos(\alpha)=\frac{b}{c}$

$\tan(\alpha)=\frac{a}{b}$



Beispiel Winkelfunktionen spezieller Winkel mit Taschenrechner (Taschenrechner muss auf Gradmass umgeschaltet werden) berechnen.

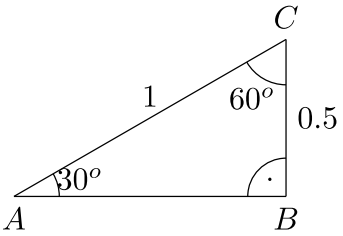
(1) $\sin(30^o)=0.5$

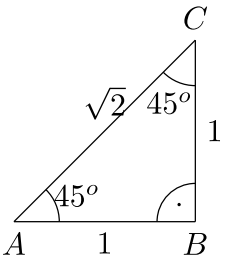
(2) $\sin(45^o)=0.7071=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\cos(60^o)=0.5$

(4) $\cos(45^o)=0.7071=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $\tan(45^o)=1$





Definition <u>Umkehrfunktionen</u> der Winkelfunktionen sind

$\arcsin(\frac{GK}{H})=\alpha$ **<u>Arkussinus</u>**

$\arccos(\frac{AK}{H})=\alpha$ **<u>Arkuskosinus</u>**

$\arctan(\frac{GK}{AK})=\alpha$ **<u>Arkustangens</u>**

Notation Man schreibt auch $\sin^{-1}(\frac{GK}{H})=\alpha$, $\cos^{-1}(\frac{AK}{H})=\alpha$, $\tan^{-1}(\frac{GK}{AK})=\alpha$.

Beispiel Umkehrfunktionen spezieller Seitenverhältnisse mit Taschenrechner berechnen

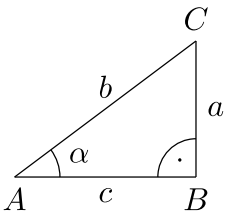
(1) $\arcsin(0.5)=30^o$ (3) $\arccos(0.5)=60^o$ (5) $\arctan(1)=45^o$

(2) $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2})=45^o$ (4) $\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2})=45^o$

Beispiel 1 Berechne im rechtwinkligen Dreieck ABC

(a) Winkel α für $a=6.7\,cm, b=7.3\,cm$

(b) Seiten a, c für $b=8.5\,cm, \gamma=43^o$



(a) $\sin(\alpha)=\frac{a}{b}=\frac{6.7}{7.3}$ und damit ist $\alpha=\arcsin(\frac{6.7}{7.3})\approx 66.6^o$

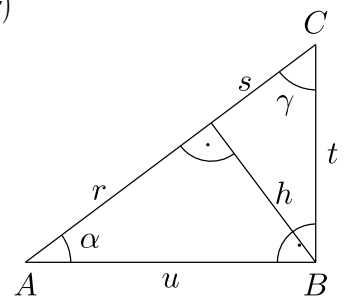
(b) $\sin(\gamma)=\frac{c}{b}$ und damit ist $c=b\sin(\gamma)=8.5\,cm\cdot\sin(43^o)\approx 5.8\,cm$

Pythagoras liefert: $a=\sqrt{b^2-c^2}\approx 6.2\,cm$

Beispiel 2

(a) Bestimme alle Seitenverhältnisse zu $\cos(\alpha)$ und $\tan(\gamma)$

(b) Drücke Seitenverhältnisse $\frac{s}{t}, \frac{u}{r+s}, \frac{h}{r}, \frac{t}{r+s}, \frac{t}{u}, \frac{h}{t}$ als Sinus, Kosinus oder Tangens aus



(a) $\cos(\alpha)=\frac{u}{r+s}=\frac{r}{u}$, $\tan(\gamma)=\frac{u}{t}=\frac{h}{s}$

(b) $\frac{s}{t}=\cos(\gamma)$, $\frac{u}{r+s}=\sin(\gamma)=\cos(\alpha)$, $\frac{h}{r}=\tan(\alpha)$, $\frac{t}{u}=\tan(\alpha)$, $\frac{h}{t}=\sin(\gamma)$

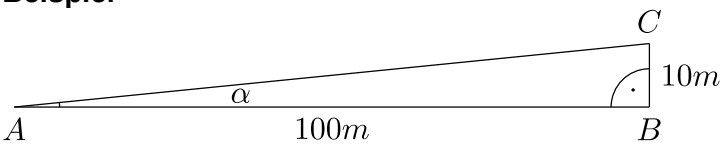
Aufgaben Aufgaben 1 - 5, Seite 74 im Lehrmittel *Lambacher-Schweizer 9/10.*

2. Berechnung von Steigungen

Definition Die **Steigung** (z. B. einer Strasse) ist das Verhältnis $\frac{h}{s}$ des Höhenunterschieds h zur horizontal gemessenen Strecke s.

Bemerkung Die Steigung wird meist in Prozent angegeben

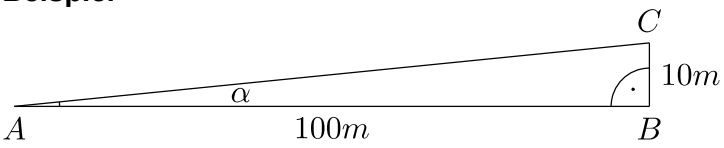
Beispiel



Steigung in Prozent ist $\frac{100 \cdot h}{s} = \frac{100 \cdot h}{s} = \frac{100 \cdot 10}{100} = 10\,\%$

Bemerkung Für den Steigungswinkel α gilt: $\tan(\alpha) = \frac{GK}{AK} = \frac{h}{s} = Steigung$

Beispiel

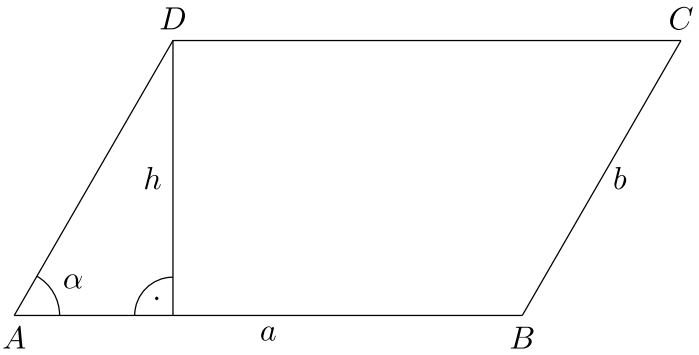


$\alpha = \arctan\left(\frac{GK}{AK}\right) = \arctan\left(\frac{h}{s}\right) = \arctan\left(Steigung\right) = \tan^{-1}(0.1) \approx 5.71^{o}$

Aufgaben Aufgaben 13 - 15, Seite 75 im Lehrmittel *Lambacher-Schweizer 9/10.*

3. Berechnungen an Figuren

Beispiel Gegeben sei ein Parallelogramm mit Seiten $a=8, b=5$ und Winkel $\alpha=60^o$. Berechne den Flächeninhalt.



$\frac{h}{b}=\sin(\alpha)$, also ist $h=b\sin(\alpha)$

Fläche $F=a\,h=a\,b\sin(\alpha)=8\cdot5\cdot\sin(60^o)=40\cdot\sqrt{3}/2=20\cdot\sqrt{3}\approx34.6$

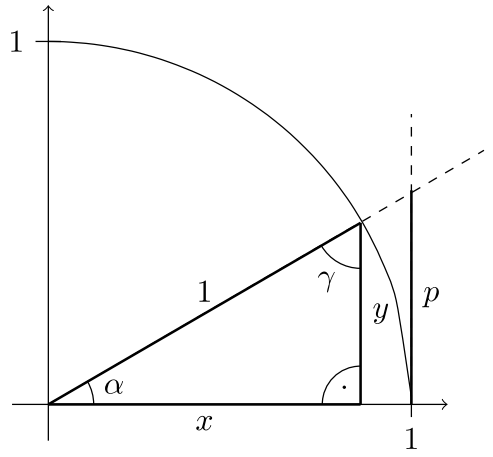
Allgemeines Vorgehen

- Skizze mit gegebenen und gesuchten Strecken und Winkel anfertigen.
- Rechtwinklige Dreiecke suchen (Hilfslinien einzeichnen)
- Pythagoras, Winkelsumme im Dreieck, Winkel- und Seitengleichheiten, Winkelfunktionen anwenden.

Aufgaben Aufgaben 1 - 6, Seite 77 - 78 im Lehrmittel *Lambacher-Schweizer 9/10.*

4. Beziehungen zwischen Winkelfunktionen

Wir betrachten die Winkelfunktionen im Einheitskreis (Kreis mit Radius 1).



$\gamma = 90^o - \alpha$

$x = \cos(\alpha)$

$y = \sin(\alpha) = \cos(\gamma) = \cos(90^o - \alpha)$

$1 = x^2 + y^2 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$ (Pythagoras)

$p = \tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Satz Es gilt:

(1) $\cos(\alpha) = \sin(90^o - \alpha)$, (2) $\sin(\alpha) = \cos(90^o - \alpha)$ (3) $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ (4) $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

Bemerkungen

(1) Wenn $\alpha = 0$:

- Dann ist $y = 0$ und damit gilt $\sin(0) = y = 0$
- Dann ist $x = 1$ und damit gilt $\cos(0) = x = 1$
- Dann ist $p = 0$ und damit gilt $\tan(0) = p = 0$

(2) Wenn $\alpha = 90^o$:

- Dann ist $y = 1$ und damit gilt $\sin(90^o) = y = 1$
- Dann ist $x = 0$ und damit gilt $\cos(90^o) = x = 0$
- Dann ist $p \to \infty$ und damit gilt $\tan(90^o) = p \to \infty$ (nicht definiert)

(3) Definitionsbereiche sind demnach:

- Für $\sin(\alpha), \cos(\alpha)$: $0 \leqslant \alpha \leqslant 90^o$
- Für $\tan(\alpha)$: $0 \leqslant \alpha < 90^o$

Beispiele

(1) Vereinfache $\tan(90^o-\alpha)$.

(2) Gegeben: $\sin(\alpha)=\frac{3}{5}$. Berechne (a) $x=\cos(\alpha)$ (b) $\tan(\alpha)$.

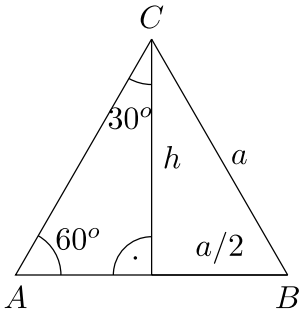
(3) Berechne $\cos(\alpha)$, $\sin(30^o)$, $\cos(30^o)$, $\cos(60^o)$, $\tan(30^o)$, $\tan(60^o)$ ohne Taschenrechner mit Hilfe dem obigen Satz.

(4) Vereinfache $\frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$.

(1) $\tan(90^o-\alpha)=\frac{\sin(90^o-\alpha)}{\cos(90^o-\alpha)}=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{1}{\tan(\alpha)}$

(2a) $\cos^2(\alpha)=1-\sin^2(\alpha)=1-(\frac{3}{5})^2=\frac{25-9}{25}=\frac{16}{25}$, also ist $\cos(\alpha)=\frac{4}{5}$

(2b) $\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$



(3a) $\sin(30^o)=\cos(60^o)=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a}}{a\cdot\frac{1}{a}}=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$

(3b) $\sin(60^o)=\cos(30^o)=\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}}{a}=\frac{a\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{a}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3c) $\tan(30^o)=\frac{\sin(30^o)}{\cos(30^o)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(3d) $\tan(60^o)=\frac{1}{\tan(30^o)}=\sqrt{3}$

(4) $$\frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}=\frac{\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}{1+\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}=\frac{\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\cdot\cos^2(\alpha)}{(1+\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)})\cdot\cos^2(\alpha)}=\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}=\sin^2(\alpha)$$

Aufgaben Aufgaben 1 - 6, Seite 80 - 81 im Lehrmittel *Lambacher-Schweizer 9/10.*