Zahlenfolgen

Verwendetes Aufgabenbuch: *Erhard Rhyn, Analysis*

1. Einführung

Definition Eine **Zahlenfolge** oder **Folge** ist eine Funktion bei der jeder natürlichen Zahl $n \geqslant 1$ eine reelle Zahl a_n zugeordnet wird. Die Zahlen a_n heissen **Glieder** der Folge.

Beispiel (Aufgabe 1)

(a) $a_n = 3n$ $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 9$, $a_4 =$, $a_5 =$

(d) $a_n = n^2 + 3$ $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 12$, $a_4 =$, $a_5 =$

(g) $a_n = (-1)^n$ $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 =$, $a_5 =$

Aufgaben Aufgabe 1 S. 1 - alle ausser (a), (d), (g)

Drei Darstellungen von Folgen

(1) Explizit (Funktion)

Jedes Glied wird als Funktion von $n \geqslant 1$ wie in der Definition oben angegeben. Damit kann a_n direkt aus n berechnet werden.

(2) Aufzählend

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots$

a_i bedeutet das i - te Glied der Folge

(3) Rekursiv

Die ersten Glieder werden angegeben sowie eine Vorschrift wie ein Glied aus den vorangehenden Gliedern berechnet werden kann.

Beispiel Folgende Darstellungen stellen dieselbe Folge dar

(1) $a_n = n^2$ (explizit)

(2) $(a_n) = 1, 4, 9, 16, \ldots$ (aufzählend)

(3) $a_1 = 1$, $a_n = \left(\sqrt{a_{n-1}} + 1\right)^2$ (rekursiv)

Bemerkungen

(1) Bei einer aufzählenden Darstellung ist es nie klar wie es weitergeht.

Bsp. $(a_n)=1,2,3,4,...$, es kann sein dass $(a_n)=1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,3,4,...$

(2) Es gibt Folgen die nicht explizit dargestellt werden können.

Bsp. Primzahlen $(a_n)=2,3,5,7,11,13,...$

(3) Die **Fibonacci-Folge** ist eine bekannte Folge und wird rekursiv definiert mit

$a_1=0$, $a_2=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, in aufzählender Form $(a_n)=0,1,1,2,3,5,8,13,21,...$

Aufgaben A. 2, 3, 4; S. 1 (explizit und aufzählende Darstellung)

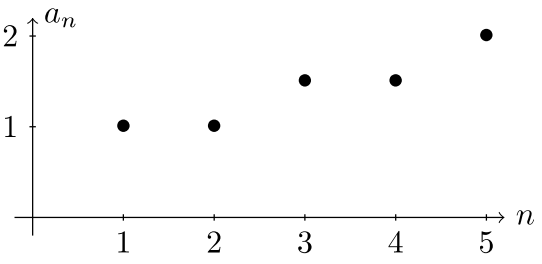
Aufgaben A. 5, 6, 7, 8; S. 1, 2 (rekursive Darstellung)

Definition Eine Folge heisst (a) **monoton steigend** und (b) **monoton fallend** falls für alle $n \geqslant 1$ gilt

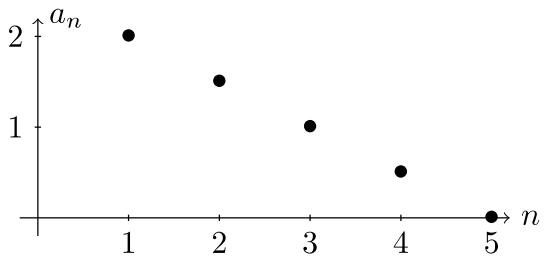
(a) $a_{n+1} \geqslant a_n$ (b) $a_{n+1} \leqslant a_n$

Beispiel

(a) monoton steigend



(b) monoton fallend



Aufgaben A. 12, 13; S. 2

Definition Addiert man die Glieder einer Folge a_n erhält man die **Teilsummenfolge** s_n, auch **Zahlenreihe** oder einfach **Reihe** genannt.

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$\ldots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Bemerkung Reihen sind auch Folgen

Notation Zur Abkürzung der Summen führt man das Summenzeichen Σ ein.

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Beispiel (Aufgabe 11a)

$$s_4 = \sum_{k=1}^{4} (3k-2) = (3\cdot 1-2) + (3\cdot 2-2) + (3\cdot 3-2) + (3\cdot 4-2) = 1+4+7+10 = 22$$

Aufgaben A. 9, 10, 11; S. 2

2. Arithmetische Folgen

Definition Eine Folge heisst **arithmetische Folge 1. Ordnung** oder einfach **arithmetische Folge** (AF), wenn $a_{n+1}-a_n$ für jedes n denselben Wert hat. Dieser Wert heisst **Differenz der Folge** und wird mit d bezeichnet.

Bemerkungen

(1) Zur Namensgebung: Jedes Glied ist gleich dem arithmetischen Mittel seiner beiden Nachbarglieder, d.h. $a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n+1})$

(2) Die rekursive Form einer arithmetischen Folge ist $a_{n+1}=a_n+d$

(3) Die explizite Form einer arithmetischen Folge ist $a_n=a_1+(n-1)d$

(4) Die Summe der ersten n Glieder (arithm. Reihe) ist $s_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

Beweis (3)

$a_2=a_1+d$

$a_3=a_2+d=a_1+d+d=a_1+2d$

$a_4=a_3+d=a_1+2d+d=a_1+3d$

...

$a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-2)d+d=a_1+(n-1)d$

■

Beweis (4)

Zwei Beweise (a) und (b) werden hier aufgeführt. Beweis (a) ist grundlegend und einfach. Beweis (b) geht über den Weg der Summe natürlicher Zahlen $s_n=1+2+3+4+5+...+n$, die in der Mathematik immer wieder vorkommt.

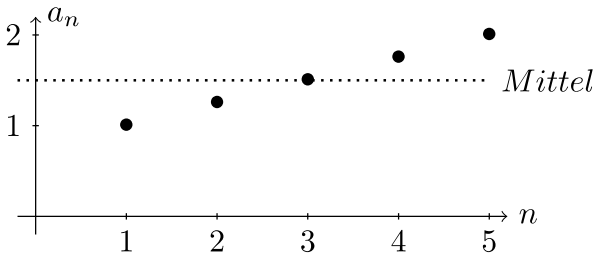
Beweis (a)

Eine Folge mit Glieder $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ hat den Mittelwert $(a_1+a_n)/2$ weil zwischen zwei Glieder immer die Differenz d liegt und damit die Glieder gleichmässig entlang einer Geraden liegen. Der Mittelwert lässt sich aber natürlich auch wie üblich mit $(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)/n$ berechnen. Also gilt:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}$$

Umformen (beidseitig mit n multiplizieren) ergibt: $s_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

Bsp. $n=5, a_1=1, d=0.25$



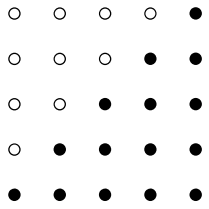
In der Graphik sieht man, dass das Mittel sowohl $(a_1+a_5)/2$ als auch $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)/5$ ist.

■

Beweis (b)

Betrachte die Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen $s_n=1+2+3+4+5+\ldots+n$

Bsp. $n=5$



Anzahl schwarze Punkte: $s_{schwarz}=1+2+3+4+5$

Anzahl weisse Punkte: $s_{weiss}=1+2+3+4$

Total Anzahl Punkte: $5^2=25=s_{schwarz}+s_{weiss}=2s_{schwarz}-5$

$$s_{schwarz}=\frac{1}{2}(5^2+5)=\frac{1}{2}(n^2+n)=\frac{n}{2}(1+n)$$

d.h. $s_n=1+2+3+4+5+\ldots+n=\frac{n}{2}(1+n)$

Auf die Reihe $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ angewendet:

$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=a_1+(a_1+d)+\ldots+(a_1+(n-1)d)=na_1+d+2d+\ldots+(n-1)d$$

$$s_n=na_1+(1+2+3+..+(n-1))d=na_1+\frac{n-1}{2}nd=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

■

Aufgaben A. 14, 15, 16, 17; S. 2, 3

3. Geometrische Folgen

Definition Eine Folge heisst **<u>geometrische Folge</u>** (GF), wenn alle Glieder verschieden von null sind und $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für jedes n denselben Wert hat. Dieser Wert heisst **<u>Quotient der Folge</u>** und wird mit q bezeichnet.

Bemerkungen

(1) Zur Namensgebung: Jedes Glied ist gleich dem geometrischen Mittel seiner beiden Nachbarglieder, d.h. $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

(2) Die rekursive Form einer geometrischen Folge ist $a_{n+1} = q\, a_n$

(3) Die explizite Form einer geometrischen Folge ist $a_n = a_1 q^{n-1}$

(4) Die Summe der ersten n Glieder (geom. Reihe) ist $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Beweis (4)

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 + (a_1 q) + ... + (a_1 q^{(n-1)}) = a_1 (1 + q + .. + q^{(n-1)})$$

$$q\, s_n = a_1 (q + q^2 + .. + q^n)$$

$$s_n - q\, s_n = s_n (1 - q) = a_1 (1 + q + .. + q^{(n-1)}) - a_1 (q + q^2 + .. + q^n) = a_1 (1 - q^n) \qquad \text{(Teleskopsumme)}$$

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Aufgaben A. 19, 20, 21, 22; S. 2, 3

4. Grenzwert, Konvergenz und Divergenz

Definition Eine Folge (a_n) heisst **<u>konvergent</u>** (engl. converge - zusammenlaufen) gegen a (a heisst **<u>Grenzwert</u>** oder **<u>Limes</u>** der Folge), falls gilt

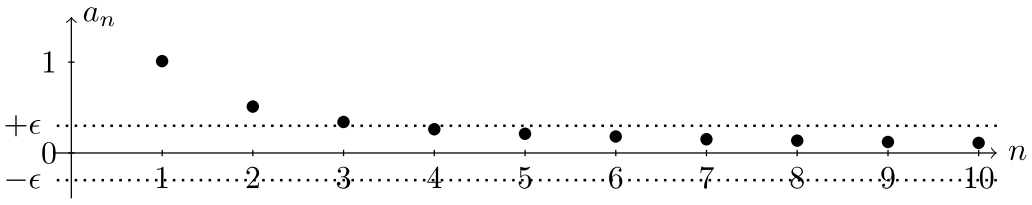
Zu jedem $\epsilon>0$ existiert ein N, so dass $|a_n-a|<\epsilon$ für alle $n\geqslant N$.

Man schreibt $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (‹a ist der Limes für n gegen Unendlich›)

Bemerkung (Geometrische Deutung)

Der Grenzwert einer Folge ist eine Zahl a, der die Folge beliebig nahe kommt. Dies bedeutet dass in jeder Umgebung des Grenzwerts $a-\epsilon<x<a+\epsilon, \epsilon>0$ alle bis auf endlich viele Glieder liegen.

Beispiel $a_n=\frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0. Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ und sagt ‹Limes von $\frac{1}{n}$ für n gegen Unendlich ist gleich null›.



Die Umgebung von null ist $(-\epsilon,+\epsilon), \epsilon>0$ (Bereich zwischen roten Linien oben). Es gilt dass für alle Umgebungen von null, alle Glieder bis auf endlich viele in der Umgebung liegen. Damit sieht man dass $a_n=\frac{1}{n}$ konvergent ist und den Grenzwert null hat.

Definition Falls eine Folge keinen Grenzwert hat, heisst die Folge <u>divergent</u>. Eine divergente Folge heisst **<u>bestimmt divergent</u>**, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$, sonst heisst die Folge **<u>unbestimmt divergent</u>**.

Bemerkungen

(1) $(a_n)=1,2,3,4,...$ bestimmt divergent, weil $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$

(2) Arithmetische Folgen mit $d>0$ sind immer bestimmt divergent.

Grenzwertsätze Seien (a_n), (b_n) zwei konvergierende Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty} (b_n) = a \pm b$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (b_n) = a \cdot b$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)} = \frac{a}{b}, b \neq 0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = c \cdot b, c \in \mathbb{R}$

Beispiele

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n} + \frac{n+1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n}) + \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n}) = 0 + 1 = 0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^2 = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n}) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n}) = 1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}} = \frac{0}{1} = 0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} (5\frac{n+1}{n}) = 5 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n}) = 5 \cdot 1 = 5$

Notation Anstelle von $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ schreibt man auch einfach $a_n \to a$. Bsp. $\frac{1}{n} \to 0$

Aufgaben A. 84, 87, 90; S. 9, 10

Grenzwerte von geometrischen Reihen

Beispiel

$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ $\quad s_1=1 \quad s_2=1+\frac{1}{2} \quad s_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ...

$s=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots$

Summanden a_i bilden geometrische Folge mit $a_1 =$ $q =$

Also ist $s_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q} =$

und $s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n =$

Satz Eine geometrische Reihe hat genau dann einen Grenzwert, wenn $|q|<1$ ist. Der Grenzwert ist

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} a_1\frac{1-q^n}{1-q}=a_1\frac{1-0}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}$$

Aufgaben A. 96, 97, 107a, 109, 111; S. 11, 12